La magia dei numeri primi

Marco Damele

18 Maggio 2025

Definizione di numero primo

Definizione

Un numero naturale $p \geq 2$ è detto primo se non può essere scritto come prodotto di due numeri naturali, ognuno dei quali sia minore di p.

Definizione di numero primo

Definizione

Un numero naturale $p \geq 2$ è detto primo se non può essere scritto come prodotto di due numeri naturali, ognuno dei quali sia minore di p.

Vediamo qualche esempio:

Esempio

- *Sono numeri primi:* $3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$
- *Non sono primi:* $6 = 2 \times 3,\ 8 = 2^3,\ 15 = 3 \times 5, \ldots$

Definizione di numero primo

Definizione

Un numero naturale $p \geq 2$ è detto primo *se non può essere scritto come prodotto di due numeri naturali, ognuno dei quali sia minore di p.*

Vediamo qualche esempio:

Esempio

- *Sono numeri primi:* $3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$
- *Non sono primi:* $6 = 2 \times 3,\ 8 = 2^3,\ 15 = 3 \times 5, \ldots$

Una domanda sorge spontanea:

Domanda

Perché i numeri primi sono importanti?

Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

Teorema (Teorema Fondamentale dell'Aritmetica)

Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Allora n è primo oppure è prodotto di numeri primi.

Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

Teorema (Teorema Fondamentale dell'Aritmetica)

Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Allora n è primo oppure è prodotto di numeri primi.

Proof.

Supponiamo che la tesi sia falsa e sia n il più piccolo controesempio. Allora n non è primo e non può essere scritto come prodotto di numeri primi. Essendo n non primo, esistono $a, b < n$ tali che $n = ab$. Per minimalità di n, a e b si scrivono come prodotti di numeri primi:

$$a = p_1 \cdots p_t, \quad b = q_1 \cdots q_\ell$$

dove p_i e q_j sono primi. Dunque:

$$n = a \cdot b = p_1 \cdots p_t q_1 \cdots q_\ell$$

cioè è prodotto di primi, contraddicendo l'ipotesi. $\square$

Esempi

Esempio

1. $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$
2. $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$
3. $135 = 27 \times 5 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$

Esempi

Esempio

1. $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$
2. $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$
3. $135 = 27 \times 5 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$

Determinare la fattorizzazione in numeri primi non è affatto banale. Anche capire se un numero è primo è un problema complesso.

Esempi

Esempio

1. $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$
2. $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$
3. $135 = 27 \times 5 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$

Determinare la fattorizzazione in numeri primi non è affatto banale. Anche capire se un numero è primo è un problema complesso.

Domanda

Il numero $2^{32} + 1$ *è primo?*

Quanti sono i numeri primi

Quanti sono i numeri primi

Teorema

I numeri primi sono infiniti.

Quanti sono i numeri primi

Teorema

I numeri primi sono infiniti.

Proof.

Supponiamo per assurdo che i primi siano finiti: $p_1, \ldots, p_n$. Consideriamo:

$$N = p_1 \cdots p_n + 1$$

Per il teorema precedente, N è primo o prodotto di primi. Ma nessuno dei p_i divide N, poiché lascia resto 1. Quindi esiste un primo non presente nella lista iniziale. Contraddizione. $\square$

Distribuzione dei numeri primi

I numeri primi: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

Distribuzione dei numeri primi

I numeri primi: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ Non sembrano seguire uno schema regolare. La loro distribuzione appare irregolare, quasi caotica.

Distribuzione dei numeri primi

I numeri primi: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ Non sembrano seguire uno schema regolare. La loro distribuzione appare irregolare, quasi caotica.

Teorema (Formula di Willans)

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2^n} \left\lfloor \left(\frac{n}{1 + \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \cos^2 \left(\pi \frac{(j!+1)}{j+1} \right) \right\rfloor} \right)^{1/n} \right\rfloor$$

Distribuzione dei numeri primi

I numeri primi: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ Non sembrano seguire uno schema regolare. La loro distribuzione appare irregolare, quasi caotica.

Teorema (Formula di Willans)

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2^n} \left\lfloor \left(\frac{n}{1 + \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \cos^2 \left(\pi \frac{(j!+1)}{j+1} \right) \right\rfloor} \right)^{1/n} \right\rfloor$$

Questa formula è teoricamente interessante, ma inefficiente e non utile per comprendere la distribuzione dei primi.

Altre stranezze...

Altre stranezze...

Esistono intervalli arbitrariamente lunghi privi di numeri primi!

Altre stranezze...

Esistono intervalli arbitrariamente lunghi privi di numeri primi! Definiamo il fattoriale:

$$n! := n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$$

Altre stranezze...

Esistono intervalli arbitrariamente lunghi privi di numeri primi! Definiamo il fattoriale:

$$n! := n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$$

Esempi:

- $5! = 120$
- $2! = 2$
- $4! = 24$

Altre stranezze...

Osserviamo che $n! + 2$ è divisibile per 2, $n! + 3$ per 3, ..., $n! + n$ per n.

$\Rightarrow$ L'intervallo $[n! + 2,\ n! + n]$ contiene solo numeri composti.

Altre stranezze...

Osserviamo che $n! + 2$ è divisibile per 2, $n! + 3$ per 3, ..., $n! + n$ per n.

$\Rightarrow$ L'intervallo $[n! + 2, \; n! + n]$ contiene solo numeri composti.

Domanda

Quanti primi ci sono della forma $n! + 1$?

Il postulato di Bertrand

Teorema (Postulato di Bertrand)

Per ogni $n \geq 2$, esiste un primo p tale che:

$$n < p < 2n$$

Esempio: tra 5 e 10 c'è 7, che è primo.

Il postulato di Bertrand

Teorema (Postulato di Bertrand)

Per ogni $n \geq 2$, esiste un primo p tale che:

$$n < p < 2n$$

Esempio: tra 5 e 10 c'è 7, che è primo.

Teorema

Ogni intero $n \geq 7$ si scrive come somma di un numero finito di primi distinti.

Esempi:

$$14 = 7 + 3 + 5, \quad 25 = 13 + 7 + 5, \quad 21 = 19 + 2$$

La congettura di Goldbach

Congettura (Forte di Goldbach)

Ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi.

Esempi:

$$
\begin{aligned}
4 &= 2 + 2 \\
6 &= 3 + 3 \\
8 &= 3 + 5 \\
10 &= 5 + 5 = 3 + 7 \\
100 &= 47 + 53
\end{aligned}
$$

- Congettura forte: non dimostrata, ma verificata fino a circa 4×10^{18}
- Congettura debole: ogni numero dispari > 5 è somma di tre primi (dimostrata da Helfgott, 2013)

La congettura dei primi gemelli

Una coppia (p, q) di numeri primi è detta coppia di primi gemelli se $q = p + 2$. Esempi:

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ (17,19),\ (29,31)$$

Congettura

Esistono infiniti primi gemelli?

Maynard ha dimostrato che esistono infiniti p tali che $p + 246$ è primo. Coppia gemella più grande conosciuta (2023):

$$(2996863034895 \cdot 2^{1290000} \pm 1)$$

con oltre 388.000 cifre.

La somma dei reciproci dei primi gemelli

Nel 1919, Viggo Brun introdusse la **cribratura di Brun**.

La somma dei reciproci dei primi gemelli

Nel 1919, Viggo Brun introdusse la **cribratura di Brun**.

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p+2 \text{ primo}}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} \right) < \infty$$

La somma dei reciproci dei primi gemelli

Nel 1919, Viggo Brun introdusse la **cribratura di Brun**.

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p+2 \text{ primo}}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} \right) < \infty$$

Questa somma è detta **costante di Brun**:

$$B_2 \approx 1.902160583104\ldots$$

La somma dei reciproci dei numeri primi

Domanda

Quanto vale la somma infinita dei reciproci dei numeri primi?

$$\sum_{p \ primo} \frac{1}{p} = ?$$

Consideriamo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$$

dove p_k è il k-esimo numero primo.

Esempi di somme parziali

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$S_2 = 0.5 + \frac{1}{3} = 0.8333$$
$$S_3 = 0.8333 + \frac{1}{5} = 1.0333$$
$$\ldots$$
$$S_{10} = 1.5334$$

Esempi di somme parziali

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = 0.5 + \frac{1}{3} = 0.8333$$

$$S_3 = 0.8333 + \frac{1}{5} = 1.0333$$

$$\ldots$$

$$S_{10} = 1.5334$$

La somma cresce lentamente, ma diverge:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty$$

(Eulero)

Primi come somma di quadrati

Teorema (Fermat)

Un primo p si scrive come somma di due quadrati:

$$p = a^2 + b^2$$

se e solo se $p = 2$ oppure $p \equiv 1 \pmod 4$

Esempi

$$2 = 1^2 + 1^2$$
$$5 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 1^2 + 4^2$$

I primi $3, 7, 11, \ldots$, della forma $4k + 3$, **non** si scrivono come somma di due quadrati.

La funzione $\pi(x)$

La funzione $\pi(x)$ conta i numeri primi minori o uguali a x:

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ primo}\}$$

$$\begin{aligned} \pi(10) &= 4 \quad (2, 3, 5, 7) \\ \pi(100) &= 25 \\ \pi(1000) &= 168 \end{aligned}$$

Teorema dei numeri primi

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{per } x \to \infty$$

Teorema dei numeri primi

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{per } x \to \infty$$

Una stima più precisa:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \quad \pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$$

Riepilogo: Numeri Complessi e Parte Reale

- Un numero complesso si scrive come:

$$z = x + iy, \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1$$

- La **parte reale** di z è il numero reale x, indicata come:

$$\Re(z) = x$$

- La **parte immaginaria** di z è il numero reale y, indicata come:

$$\Im(z) = y$$

- I numeri complessi possono essere rappresentati nel piano complesso, con l'asse orizzontale per la parte reale e quello verticale per la parte immaginaria.

Funzioni Complesse e Zeri

- Una **funzione complessa** è una funzione che mappa numeri complessi in numeri complessi:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$

- Uno **zero** di una funzione complessa è un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che:

$$f(z_0) = 0$$

- Funzione polinomiale:

$$f(z) = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = 0 \implies z = \pm 1$$

- Funzione esponenziale:

$$f(z) = e^z - 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = 0 \implies z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La funzione zeta di Riemann

Definizione

Per $\mathrm{Re}(s) > 1$, la funzione zeta si definisce come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La funzione zeta di Riemann

Definizione

Per $\mathrm{Re}(s) > 1$, la funzione zeta si definisce come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Prodotto di Eulero

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

La funzione zeta di Riemann

Definizione

Per $\mathrm{Re}(s) > 1$, la funzione zeta si definisce come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Prodotto di Eulero

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

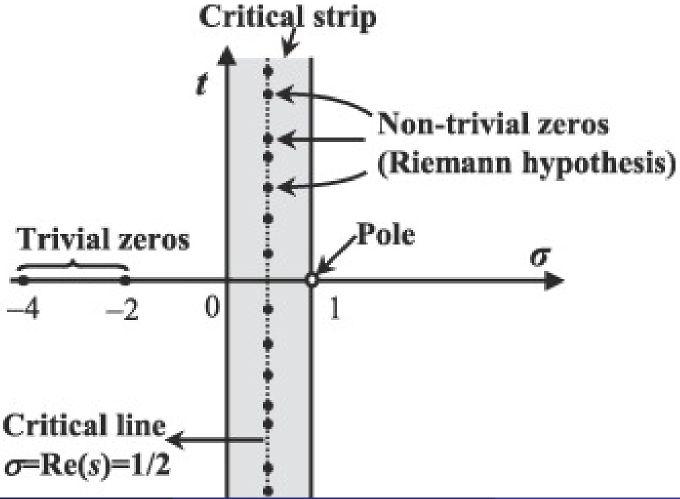
- Zeri:
  - Banali: $s = -2, -4, -6, \ldots$
  - Non banali: $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$
- **Ipotesi di Riemann**: tutti gli zeri non banali hanno $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$

Zeri della funzione zeta

- Gli zeri non banali di $\zeta(s)$ si trovano nella striscia $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$
- Tutti quelli conosciuti giacciono sulla retta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$
- Questo è il cuore dell'**Ipotesi di Riemann**

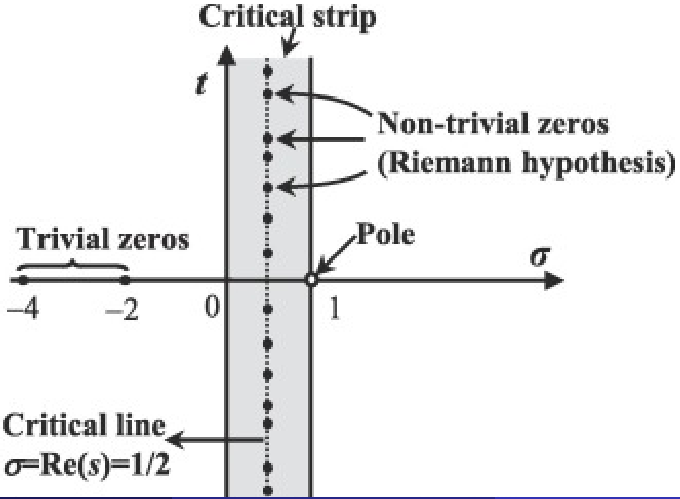
Zeri della funzione zeta

- Gli zeri non banali di $\zeta(s)$ si trovano nella striscia $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$
- Tutti quelli conosciuti giacciono sulla retta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$
- Questo è il cuore dell'**Ipotesi di Riemann**



Zeri della funzione zeta

- Gli zeri non banali di $\zeta(s)$ si trovano nella striscia $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$
- Tutti quelli conosciuti giacciono sulla retta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$
- Questo è il cuore dell'**Ipotesi di Riemann**



Ipotesi di Riemann e Distribuzione dei Numeri Primi

- **Ipotesi di Riemann**: afferma che tutti gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann hanno parte reale uguale a $\frac{1}{2}$, cioè si trovano sulla retta critica $\Re(s) = \frac{1}{2}$ nel piano complesso.
- **Conseguenze principali**:
  - **Teorema dei numeri primi**: la funzione conteggio dei numeri primi $\pi(x)$ è asintoticamente equivalente a $\frac{x}{\log x}$, con un errore controllato. L'ipotesi di Riemann implica che l'errore è limitato da $O(x^{1/2+\epsilon})$ per ogni $\epsilon > 0$.
  - **Distribuzione regolare dei numeri primi**: una dimostrazione dell'ipotesi fornirebbe una stima più precisa della distribuzione dei numeri primi, riducendo le fluttuazioni impreviste tra di essi.
  - **Congetture correlate**: la veridicità dell'ipotesi di Riemann ha implicazioni per altre congetture, come la congettura di Goldbach e la congettura dei numeri primi gemelli.
- **Importanza**: la dimostrazione dell'ipotesi di Riemann rappresenterebbe un avanzamento fondamentale nella teoria dei numeri, con ampie applicazioni in matematica e crittografia.

Grazie per l'attenzione!